Παράδειγμα

27/10/16

$GL(2, \mathbb{C})$

$Q_8 = \{\pm \mathcal{I}, \pm J, \pm \mathcal{K}, \pm \mathcal{L}\} \subseteq GL(2, \mathbb{C})$

Quaternions ~ Τεταρτόνια

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{I} \Rightarrow O(J) = 4$$

$$\mathcal{K}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathcal{I} \Rightarrow o(\mathcal{K}) = 4$$

$$\mathcal{L}^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{I}$$

$$J\mathcal{K} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}$$

$$\mathcal{K}J = -\mathcal{L}$$

$$\mathcal{K}\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = J$$

$$\mathcal{L}\mathcal{K} = -J$$

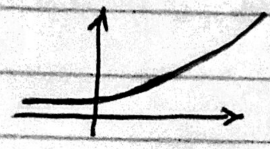
$$\mathcal{L}J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{K}$$

Παρατηρούμε ότι το Q_8 είναι κλειστό με την πράξη του πολ/μού $\Rightarrow Q_8 \leq GL(2, \mathbb{C})$

$|Q_8| = 8$ όχι αβελιανή

$|D_4| = 8$, $D_4 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g, f^3g\}$

$\mathbb{R} \leftrightarrow \{e^x \mid x \in \mathbb{R}\}$



$e^x e^{x'} = e^{x+x'}$

Γεννήτορες της Q_8:

Οποιαδήποτε δυο από τα I, J, K.

πχ $Q_8 \langle I, J \rangle$

Επειδή η Q_8 γεννάται από 2 στοιχεία τάξης 4 και η D_4 από δυο τάξης 4 και 2 αντίστοιχα, δεν είναι ισοδύναμες ομάδες. Είναι όμως ισοδύναμα σύνολα

Οι υποομάδες μιας κυκλικής τάξης n είναι και καθορίζονται από τους διαιρέτες του n. Δηλαδή αν οι διαιρέτες του n είναι $d_1, \dots, d_k$ τότε έχει ακριβώς k υποομάδες αντίστοιχης τάξης.

$O = \langle a \rangle$, $y = \langle a^d \rangle$

Άπειρη κυκλική:

$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$

$k\mathbb{Z} \ \forall k \in \mathbb{N}$

6 Ευθέα Εξωτερικά Γινόμενα

$\mathbb{R}$: δ.χ. $\rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ δ.χ

Ορισμός

Έστω G_i ομάδες και $i=1,\dots,k$ τότε ορίζεται το ευθύ γινόμενο $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$ με πράξη κατά συντεταγμένες.

Παρ

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$: Είναι κυκλική?

Πρόταση

Αν G_i ομάδες, τότε το καρτεσιανό γινόμενο είναι αβελιανή $\Leftrightarrow$ G_i αβελιανή $\forall i=1,\dots k$

Θεώρημα

Έστω $G = G_1 \times \dots \times G_k$, με G_i ομάδες

1) Αν $a_i \in G_i$ έχει πεπερασμένη τάξη $\forall i=1,\dots k$ τότε $a=(a_1,\dots,a_k)$ έχει τάξη ΕΚΠ $(o(a_1) \dots o(a_k))$

2) Έστω $G_i = \langle a_i \rangle$ κυκλικές (πεπερ. τάξης) $i=1,\dots,k$
G κυκλική $\Leftrightarrow$ ΜΚΔ $(o(a_i), o(a_j)) = 1$ $\forall i,j=1,\dots,k$ και $i \neq j$

Απόδειξη

1) $a^n = (a_1^n, \dots, a_k^n) = 1 \Leftrightarrow a_i^n = 1 \Rightarrow o(a_i) | n$
Το μικρότερο n με αυτή την ιδιότητα είναι το ΕΚΠ.

2) $O = \langle a \rangle \Rightarrow$ κάθε στοιχείο της $a^l = (a_1^l, \dots, a_k^l)$
θα είναι κάθε στοιχείο της O. Άρα κάθε συντεταγμένη
θα γεννά κάθε στοιχείο της O_i.

$$o(a) = \text{ΕΚΠ}(o(a_1), \dots, o(a_k)) = |O| = \prod_{i=1}^{k} |O_i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (o(a_i), o(a_j)) = 1 \quad \forall i \neq j$$

Παράδειγμα

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ κυκλική $\Leftrightarrow (n, m) = 1$
$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ισοδύναμη με την $\mathbb{Z}_m$

Άσκηση (Homework)

p: πρώτος : $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \not\cong \mathbb{Z}_{p^2}$
$|\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p| = p^2$

Οι μοναδικές γνήσιες υποομάδες είναι τάξης p.
Άρα όλες ισόμορφες μεταξύ τους, ισόμορφες με την $\mathbb{Z}_p$

πχ $\{0\} \times \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p \times \{0\}$
$\langle (1,1) \rangle$ $\langle (1, a) \rangle$ $a \neq 0 \neq 1$ $\not\cong \langle (1,b) \rangle$
δηλ $a \not\equiv b \bmod p$.

Να δείξω ότι δεν έχει άλλες
(+) ΝΔΟ όλες οι μη τετριμμένες υποομάδες είναι $p+1$

Συμμετρικές Ομάδες

$$S_v = \{f : \{1, 2, \dots, v\} \xrightarrow{1-1} \{1, 2, \dots, v\}\}$$

S_v με τη σύνθεση, είναι ομάδα τάξης $v!$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu \\ f(1) & f(2) & \dots & f(\nu) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \nu \text{ επιλογές} & n-1 & 1 \end{array}$$

Η σύνθεση δίνεται $f \cdot g(i) = f(g(i))$

Είναι μια $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu \\ f(1) & f(2) & & f(\nu) \end{pmatrix}$

$$1 \to f(1) \to f(f(1)) \to \dots \to f^{\nu}(1)$$

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad g: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$fg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (2,4)$$

Τα στοιχεία που μένουν σταθερά ως $1 \to 1$ δεν τα ξαναγράφω.

<u>Ορισμός</u>

Έστω $1 \leq k \leq \nu$ και $\{x_1, x_2, \dots x_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, \nu\}$
Ο k-κύκλος $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ είναι η μετάθεση ή αντιστοίχιση η οποία στέλνει το $x_i \to x_{i+1}$ με $x_k \to x_j$

και τα $y_i \in \{1, 2, \dots, \nu\} - \{x_1, \dots, x_k\}$ μένουν αναλλοίωτα

Δύο κύκλοι $(x_1, \dots x_k)$ και $(y_1, \dots, y_n)$ θα καλούνται ξένοι κύκλοι $\Leftrightarrow \{x_1, \dots, x_k\} \cap \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset$

Τάξη ενός κύκλου μήκους k είναι

$$o(x_1, \dots, x_n) = k$$

$$o((x_1, \dots, x_k)(y_1, \dots, y_n)) = o((y_1, \dots, y_n)(x_1, \dots x_k))$$

$$= \text{ΕΚΠ}\,(k, m)$$

Θεώρημα

Έστω $\alpha \in \Sigma_\nu$ τυχαία μετάθεση.
Τότε αυτή γράφεται σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους: $\alpha = \sigma_1 \dots \sigma_k$ με σ_i κύκλοι και $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$

Απόδειξη

Έστω $x_1 \in \{1, \dots, \nu\}$ με $\alpha(x_1) \neq x_1$

$$x_1 \to \alpha(x_1) \to \alpha\alpha(x_i) \to \dots \to \alpha^k(x_1) = x_1' \to \alpha(x_1') = x_1$$

Δημιουργείται ένας κύκλος $(x_1, \dots, x_n)$.

Έστω $x_2 \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ με $x_2 \notin \{x_1, \alpha(x_1), \dots x_1'\}$ και $\alpha(x_2) \neq x_2$

Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία ώστε να δημιουργηθεί ένας νέος κύκλος με τη βοήθεια της α διαφορετικός από τον προηγούμενο

Μετά από πεπερασμένα βήματα η α θα δίνεται σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους.

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 7 & 2 & 6 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$2 \to 4 \to 7 \to 3 \to 5 \to 2$ έκλεισε

$(2, 4, 7, 3, 5)$

$8 \to 9 \to 8$

$(8, 9)$

$(2,4,7,3,5)\cdot(8,9) = (9,8)(2,4,7,3,5)$

Σε αυτή τη γραφή υπάρχει μοναδικότητα ως προς τη μετάθεση

Πρόταση

Κάθε κύκλος γράφεται σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1, x_k)(x_1, x_{k-1})\dots(x_1, x_2)$$

$x_2 \to x_3$ $\qquad$ $x_2 \to x_1 \to x_3$

Η αναπαράσταση αυτή δεν είναι μοναδική.

Η αναπαράσταση όμως είναι μοναδική ως προς mod 2

Θεώρημα

Έστω $\alpha \in S_n$. Τότε το πλήθος των αντιμεταθέσεων που γράφεται η α είναι αποκλειστικά άρτιος ή περιττός αριθμός.

Ορισμός

Μια μετάθεση $\alpha \in S_n$ καλείται άρτια αν γράφεται σαν άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων. Αντίστοιχα για περιττή.

Παράδειγμα

$$(1,3,7) = (1,7)(1,3) = (4,7)(1,7)(1,4)(1,3)$$

Πχ

$2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ $\qquad$ $1+2\mathbb{Z} \not\leq \mathbb{Z}$

↳ είναι υποομάδα $\qquad$ ↳ δεν είναι

Ορισμός

$\nu > 1$.

Με A_ν συμβολίζουμε το σύνολο των αρτίων μεταθέσεων. Το υποσύνολο αυτό καλείται εναλλάσσουσα υποομάδα της Σ_ν.

Παρατήρηση

Το A_ν είναι πεπερασμένο υποσύνολο της Σ_ν. Η πράξη στην A_ν είναι κλειστή. $\Rightarrow A_\nu \leq \Sigma_\nu$

Λέγεται εναλλάσσουσα γιατί γεννιέται από όλες τις αντιμεταθέσεις.
Δηλ. έχει δυο στοιχεία και "εναλλάσσει"

Πρόταση

$$|A_\nu| = \frac{|\Sigma_\nu|}{2} = \frac{\nu!}{2}$$

Απόδειξη

$A_\nu = \{a_1, \dots a_k\}$ a_i: άρτια

$$(1,2)\, A_\nu = \{(1,2)a_1, \dots (1,2)a_2, \dots (1,2)a_k\}$$

$$(1,2)a_i = (1,2)a_j \Leftrightarrow a_i = a_j$$

$$|(1,2)\, A_\nu| = |A_\nu|$$

Έστω σ περιττή μετάθεση.

$(1,2)\sigma$: άρτια $\rightarrow (1,2)\sigma \in A_\nu$

$(1,2)(1,2)\sigma \in (1,2) A_\nu \Leftrightarrow$

$\sigma \in (1,2) A_\nu =$ Όλες οι περιττές

S_n = άρτιες $\sqcup$ περιττές $= A_n \sqcup (1,2)A_n$

$$|A_n| = |(1,2)A_n|$$

Άρα

$$|S_n| = 2|A_n|$$

Παράδειγμα

$$S_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$$

$f = (1,2,3) = (1,3)(1,2)$ άρτια

$$<(1,2,3)> = <f>$$

$$|<(1,2,3)>| = o(1,2,3) = 3$$

$$3 = \frac{|S_3|}{2} \Rightarrow <(1,2,3)> = A_3$$

$g = (1,2)$ περιττός.

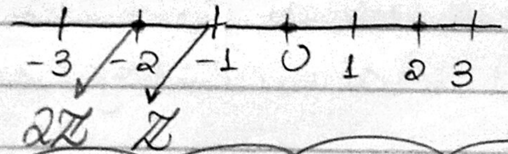
(Για τα εύκολα) Παράδειγμα

$2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$\downarrow$ υποομάδα των αρτίων.

$$\mathbb{Z}_2 = 2\mathbb{Z} \sqcup 1 + 2\mathbb{Z}$$

$\downarrow$ ή αλλιώς όλοι περιττοί.



Άρα ουσιαστικά το σύμπλοκο είναι μια μεταφορά του $2\mathbb{Z}$

Υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι το $(0,0)$, ο $\mathbb{R}^2$ και όλες οι ευθείες που περνάνε από το $(0,0)$

Έστω όλες οι ευθείες που περνάνε από το (0,0) στον $\mathbb{R}^2$ είναι ο υπόχωρος V. Αν πάρω το 3V (που είναι συμπλοκο), ενώ δεν είναι πλέον υπόχωρος, δε χάνει τη συμπεριφορά του υπόχωρου. Το ίδιο συμβαίνει αντίστοιχα και στις ομάδες.

$S_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$

$\langle f \rangle \to$ τάξης 3

$\langle g \rangle \quad \langle fg \rangle \quad \langle f^2 g \rangle$

$\langle 1 \rangle$

$6 = |O|$ O: αβελιανή, μη αβελιανή.

Homework

Αν $|O| = 6$ τότε η O είναι ισόμορφη με την S_3 είτε με την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$D_4 = \{1, f, f^2, f^3, g, fg, f^2g, f^3g\} = \langle f, g \rangle$ με $f^4 = g^2 = 1$, $gf^ig = f^{4-i}$

τάξη 4: $\langle f^2, g \rangle \neq \langle f \rangle \neq \langle f^2, fg \rangle$

τάξη 2: $\langle g \rangle \; \langle f^2 g \rangle \; \langle f^2 \rangle \quad \langle fg \rangle \; \langle f^3 g \rangle$

τάξη 1 $\langle 1 \rangle$

Ψάχνω ομάδες τάξης 4

$|O| = 4$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$

μη αβελιανή $\langle a, b \rangle = \{1, a, b, ab, ba\}$ αλλά έχω 5 στοιχεία άρα δε μου κάνει

Άρα

$ab = ba$

Άρα αβελιανή

Πρόταση

O: ομάδα και $x \subseteq O$. Υπάρχει υποομάδα $y(x) \leq O$ με τα λιγότερα στοιχεία που περιέχει το x.

Η $y(x)$ αποτελείται από πεπερασμένα γινόμενα στοιχείων του x και των αντιστρόφων του.
Επαναλήψεις επιτρέπονται.

Απόδειξη

$$y(x) = \bigcap_{x \subseteq y' \leq O} y' \leq O \quad \text{και επειδή} \quad x \subseteq y' \ \forall y' \Rightarrow y(x) \geq x$$

και $y(x)$ είναι η μικρότερη με αυτή την ιδιότητα

Έστω $O(x) = \{$όλα τα πεπερασμένα γινόμενα από στοιχεία του x και τα αντίστροφα$\}$

Η πράξη κλειστή:

γινόμενο πεπερασμένων = πεπερασμένο

Περιέχει τα αντίστροφα.

$$x \subseteq O(x) \leq O$$

$$y(x) \leq O(x)$$

$O(x) = \{$γινόμενα από το x και αντίστροφα$\}$

Άρα

$$O(x) \subseteq O(y) \Rightarrow y(x) = O(x)$$

Ορισμός

Έστω O ομάδα και $x \subseteq O$ $y(x)$ όπως ορίστηκε προηγουμένως.

Η $y(x)$ λέμε ότι γεννάται από το x και το x αποτελεί σύνολο γεννητόρων της $y(x)$

Προσοχή!

Κυρίως μας ενδιαφέρει η περίπτωση $y(x)=0$ και x ελάχιστο.